Algebra 2 - Esame 23/6/2011

Nome e Cognome: Matricola:

Giustificare brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1 Sia A_4 il sottogruppo delle permutazioni pari di S_4, cioè il gruppo alterno su 4 elementi.

1.1 Quanti possono essere i suoi sottogruppi di Sylow?

1.2 Dimostrare che K,2-sottogruppo di Sylow, è normale ed abeliano con quoziente pure abeliano. Si deduce che A_4 è abeliano?

1.3 Scrivere per esteso (cioè indicandone gli elementi) i 3-sottogruppi di Sylow.

2 Sia $m \geq 3$ un numero intero, consideriamo l'insieme:

$$R_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_m \right\}.$$

2.1 Dimostrare che R_m è sottoanello commutativo di $M_2(\mathbb{Z}_m)$.

2.2 Sia $m = 7$, dimostrare che l'insieme

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 3k & k \\ 2k & 3k \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

è un ideale di R_7. R_7 è un campo?

2.3 Dire se R_5 è un campo.

3 Sia $\mathbb{R}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo reale e sia $I[x] =< x^2 + 1 >$.

3.1 Come può essere rappresentato univocamente ogni laterale di $I[x]$ in $\mathbb{R}[x]$?

3.2 Si dimostri che $\dfrac{\mathbb{R}[x]}{I[x]} \simeq \mathbb{C}$ usando un'opportuna corrispondenza $f : \dfrac{\mathbb{R}[x]}{I[x]} \to \mathbb{C}$ definita usando il punto precedente.

4 Sia G il gruppo abeliano definito dalla presentazione

$$G = \langle x, y, z \quad | \quad x + 5y + 4z = 3x + 8y - z = -x + 2y + 9z = 0 \rangle \,.$$

4.1 Si provi che G è ciclico e se ne determini un generatore g in funzione di x, y, z.

4.2 Trovare gli interi h e k tali che $x = hg$ e $z = kg$.