Laboratorio di Algebra 2 III

1. Sia G un gruppo ciclico di ordine 20. Si provi che l'applicazione

$$\varphi : G \mapsto G \text{ definita ponendo } \varphi(g) = g^7 \ , \forall g \in G$$

è un automorfismo di G.

a) si dica qual è il periodo di φ nel gruppo $Aut(G)$ degli automorfismi di G.

b) si definisca in G una relazione $\mathcal{R}$ ponendo $x \ \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $y = \varphi^n(x)$

Si provi che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in G se ne determinino le classi e l'insieme quoziente $G/ \ \mathcal{R}$

c) In $G/ \ \mathcal{R}$ si definisca la seguente legge

$$[x] \star [y] = [xy]$$

e si dica se $\star$ è legge di composizione in $G/ \ \mathcal{R}$

2. Sia G l'insieme delle coppie ordinate di numeri razionali (a, b) con $a \neq 0$. Definito in G il prodotto

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + \frac{b}{c})$$

si verifichi quanto segue:

i) G è un gruppo;

ii) l'insieme $N = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{Q}\}$ è un sottogruppo normale di G isomorfo al gruppo adfditivo dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, +)$

iii) l'applicazione f del gruppo quoziente G/N nel gruppo moltiplicativo dei numeri razionali diversi da zero $\mathbb{Q}^*$, definita da

$$f : (a, b)N \longrightarrow a$$

è un isomorfismo.

3. Sia G un gruppo abeliano con elementi di periodo finito ed infinito . Sia T l'insieme degli elementi di periodo finito di G.

Dimostrare che T è un sottogruppo normale di G e che gli elementi di G/T, diversi da T, hanno periodo infinito

Mostrare che $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo infinito in cui tutti gli elementi hanno periodo finito.