Motivi di dimensione finita in un certo senso

Seminario di Dipartimento
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano

Carlo Mazza

31 gennaio 2012

Cos'è un motivo?

A. Grothendieck

J'appelle "motif" sur k quelque chose comme un groupe de cohomologie l-adique d'un schéma algébrique sur k, mais considéré comme indépendant de l, et avec sa structure "entière", ou disons pour l'instant "sur $\mathbb{Q}$", déduite de la théorie des cycles algébrique.

La triste vérité, c'est que pour le moment je ne sais pas définir la catégorie abélienne des motifs [...].

Motif

Motivi e coomologia

Sia $SmProj_k$ la categoria delle varietà liscie e proiettive su campo k, e sia H^* una coomologia di Weil (se $k = \mathbb{C}$ coomologia singolare, o coomologia l-adica se $\mathrm{char} k \neq l$).
Vogliamo costruire una categoria $\mathscr{M}$ che fattorizzi ogni H^* (come funtore verso gli spazi vettoriali di dimensione finita).

$$
\begin{tikzcd}
SmProj_k \arrow[r, shift left, "H_1^*"] \arrow[r, shift right, "H_2^*"'] \arrow[dr, "M"'] & Vect \\
& \mathscr{M} \arrow[u, shift left, "H_1^*"] \arrow[u, shift right, "H_2^*"']
\end{tikzcd}
$$

Motivi classici

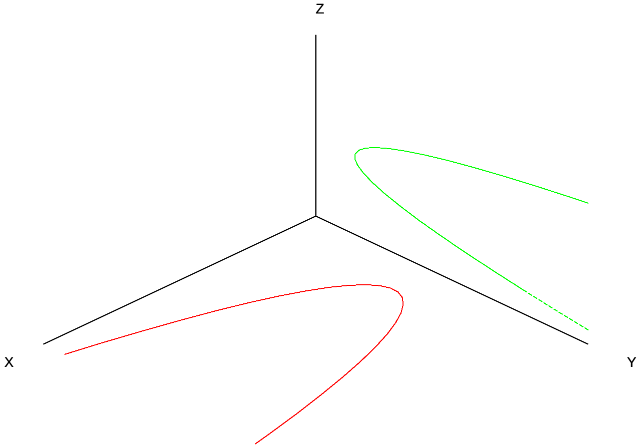
Siano X e Y due varietà lisce e proiettive: le corrispondenze da X a Y sono gli elementi del gruppo $CH^{\dim Y}(X \times Y)$ (e cioè cicli modulo equivalenza razionale).

Definizione

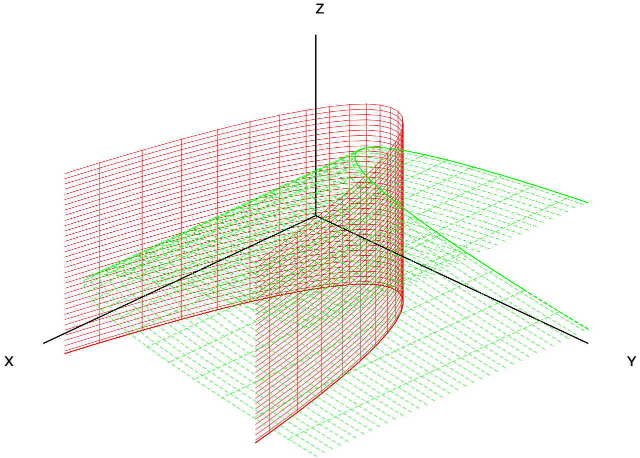
La categoria dei motivi classici $\mathscr{M}_r$ ha come oggetti le coppie (X, p) dove X è una varietà liscia e proiettiva, e p è una corrispondenza da X in X idempotente. I morfismi da (X, p) a (Y, q) sono (un sottogruppo delle) corrispondenze da X a Y.

Questa categoria è pseudo-abeliana, cioè contiene kernel e cokernel solo per mappe idempotenti.

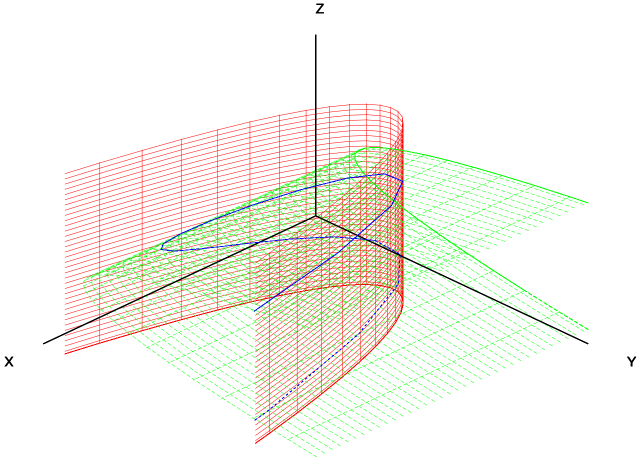
Composizione



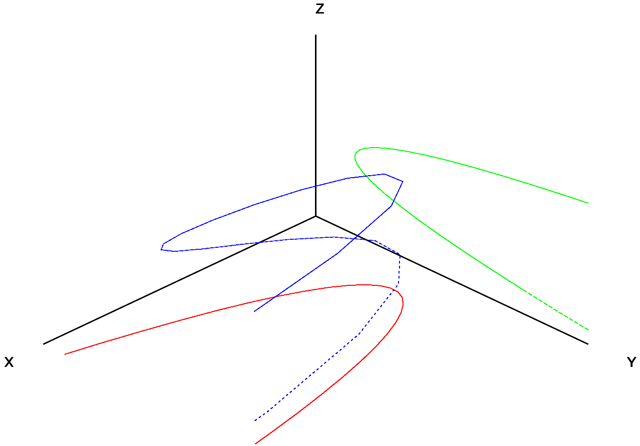
Composizione



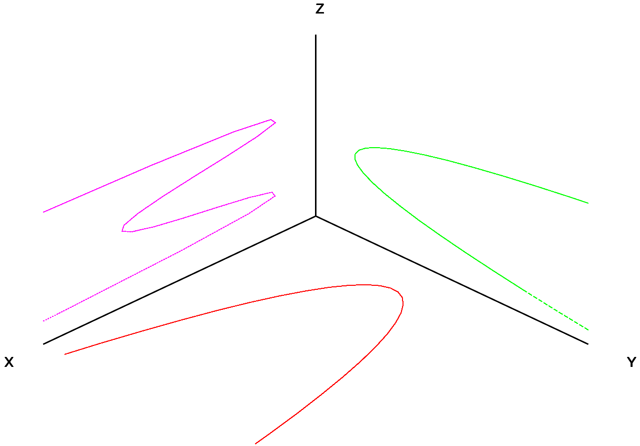
Composizione



Composizione



Composizione



Varietà e motivi

Ad ogni X associamo il motivo $M(X) = (X, \Delta_X)$ e ad ogni motivo $M = (X, p)$ associamo la coomologia $p_* H^*(X)$.

Idea

I motivi sono utili quando ci sono connessioni fra proprietà geometriche delle varietà sottostanti e proprietà algebriche nella categoria dei motivi.

Sia $\mathbb{1}$ il motivo di un punto, allora $M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{L}$ dove $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, 0 \times \mathbb{P}^1)$. I motivi $\mathbb{1}$ e $\mathbb{L}^d$ sono addendi diretti del motivo di ogni varietà di dimensione d.

Proposizione

Sia X una varietà liscia e proiettiva e sia Y una sottovarietà di codimensione r, allora il motivo dello scoppiamento di X lungo Y si scrive

$$M(Bl_Y X) = M(X) \oplus \left(\oplus_{i=1}^{r-1} M(Y) \otimes \mathbb{L}^i \right)$$

Finito dimensionalità

Sia M un oggetto di $\mathscr{M}$. Scriviamo $Sym^n(M)$ per l'addendo corrispondente al simmetrizzatore che agisce su $M^{\otimes n}$ e similarmente per $\Lambda^n(M)$.

Definizione

(Kimura-O'Sullivan) Diremo che M è pari se $\Lambda^n(M) = 0$ per qualche n. Diremo che M è dispari se $Sym^n(M) = 0$ per qualche n. Un oggetto M è finito-dimensionale (fd) se $M = M_+ \oplus M_-$, dove M_+ è pari e M_- è dispari.

La stessa definizione vale in una categoria tensoriale pseudo-abeliana $\mathbb{Q}$-lineare ($\mathbb{Q}TC$).

Proprietà elementari

Proposizione

La classe degli oggetti finito-dimensionali è chiusa rispetto a $\oplus$ e $\otimes$, addendi e quozienti.

Proposizione

Sia C una curva liscia e proiettiva, allora $M(C)$ è finito dimensionale.

Dimostrazione.

(Idea) Dopo aver tolto $\mathbb{1}$ e $\mathbb{L}$, il motivo di una curva si riduce allo Jacobiano e si usa che $Sym^{2g+1}(J(C)) = 0$. $\square$

Congettura di Bloch

Congettura

Sia X una superficie liscia e proiettiva con $p_g = 0$. Allora il kernel della mappa di Albanese $CH^2(X)_0 \to \mathrm{Alb}(X)$ è zero.

Teorema

(Kimura,Guletskiĭ-Pedrini) Sia X una superficie liscia e proiettiva con $p_g = 0$. Allora $M(X)$ è fd se e solo se vale la congettura di Bloch.

Applicazione

Proposizione

Sia X una superficie ottenuta desingolarizzando il quoziente di un prodotto di curve per un gruppo finito. Allora vale la congettura di Bloch.

Dimostrazione.

(Idea) I motivi delle curve sono fd, e così è il loro prodotto. Il quoziente per un gruppo finito è un addendo del motivo finito, quindi finito. Scoppiando punti, per la formula del blow-up troviamo ancora un motivo finito. $\square$

Partizioni

Definizione

Sia n un intero. Una partizione λ di n è una sequenze di interi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ tali che $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} > 0$ e $\sum_i \lambda_i = n$.

Per ogni partizione λ di n, sia V_λ la rappresentazione associata di Σ_n.
C'è un idempotente associato c_λ nell'algebra $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$.
Sia X un oggetto di una $\mathbb{Q}$TC $\mathscr{A}$. Allora Σ_n agisce $X^{\otimes n}$. Dato che $\mathscr{A}$ è $\mathbb{Q}$-lineare, abbiamo un azione $\mathbb{Q}[\Sigma_n] \to End(X^{\otimes n})$. Definiamo

$$S_\lambda : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \qquad X \mapsto S_\lambda(X) = \mathrm{Img}(c_\lambda|_{X^{\otimes n}})$$

Questo è il funtore di Schur di λ. In particolare, definiamo $Sym^n(X) = S_{(n)}(X)$ e $\Lambda^n(X) = S_{(1^n)}(X)$. Inoltre

$$X^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{|\lambda|=n} S_\lambda(X)^{\oplus \dim V_\lambda}$$

Schur-finitezza

Definizione

Diremo che X è Schur-finito (Sf) se esiste un n e una partizione λ di n tale che $S_\lambda(X) = 0$.

Proposizione

La classe degli oggetti Schur-finiti è chiusa rispetto a $\oplus$ e $\otimes$, addendi e quozienti. In particolare, ogni oggetto finito-dimensionale è Schur-finito.

Dimostrazione.

(Idea) Un oggetto fd si spezza in $M_+ \oplus M_-$, uno pari e l'altro dispari, in particolare Sf, e la somma di Sf è Sf. □

Categorie tannakiane

Teorema

(Tannaka, Deligne) Sia $\mathscr{A}$ una $\mathbb{Q}$TC abeliana tale che End($\mathbb{1}$) *sia un campo. Allora diciamo che $\mathscr{A}$ è tannakiana se valgono le seguenti condizioni equivalenti:*

- *$\mathscr{A}$ è isomorfa alla categoria Rep(G), per qualche G guppo-schema affine;*
- *per ogni X in $\mathscr{A}$ c'è un n tale che $\Lambda^n X = 0$.*

Teorema

(Deligne) Sia $\mathscr{A}$ una $\mathbb{Q}$TC abeliana con End($\mathbb{1}$) *campo. Allora $\mathscr{A}$ è super-tannakiana se valgono le seguenti condizioni equivalenti:*

- *$\mathscr{A}$ è isomorfa a Rep(G, ϵ) per qualche G ed ϵ;*
- *per ogni X in $\mathscr{A}$ c'è un λ tale che $S_\lambda X = 0$.*

La categoria $\mathscr{M}_n$ è super-tannakiana.

Congettura di Bloch e Schur finitezza

La Schur-finitezza è la parte *combinatorica* della Kimura-finitezza, la parte *geometrica* è la:

Congettura

(Sign conjecture) Lo spezzamento della diagonale nella proiezione sulla coomologia pari e dispari è algebrico.

Questa congettura è una (piccola) parte delle congetture standard di Grothendieck.

Teorema

(Del Padrone,-) *Sia X una varietà liscia e proiettiva il cui motivo soddisfa la sign conjecture. Sono fatti equivalenti:*

- $S_\lambda(M(X)) = 0$ *dove* λ *è "buona",*
- $M(X)$ *è fd,*
- $S_{\lambda_H}(M(X)) = 0$.

Categorie con traccia

Sia $\mathscr{A}$ una $\mathbb{Q}TC$ rigidamente dualizzabile (per ogni X esiste un duale $X^\vee$ e la composizione $X \to X \otimes X^\vee \otimes X \to X$ è l'identità di X). Sia $A \in \mathscr{A}$ e $f \in End(A)$, consideriamo la traccia

$$Tr(f) := (\mathbb{1} \xrightarrow{\delta(f)} X \otimes X^\vee \simeq X^\vee \otimes X \to \mathbb{1}) \in End(\mathbb{1}).$$

L'insieme

$$\mathscr{N}(A,B) = \{f : A \to B | Tr(g \circ f) = 0 \forall g\}$$

è l'ideale dei morfismi numericamente banali.
Se $\mathscr{A} = \mathscr{M}_r$, allora i morfismi numericamente banali sono i cicli numericamente banali, i.e., se $M = M(X)$ e H è una coomologia di Weil, allora

$$Tr(f) = deg(f \cdot p^t) = \sum_j (-1)^j Tr(f|_{H^j(X)}),$$

e quindi $\mathscr{N}(M,M) = CH^{\dim X}(X \times X)_{\mathbb{Q},num}$.

Nilpotenza e fd

Teorema

Se A è fd, allora ogni endomorfismo numericamente banale è nilpotente.

Sia $S_\lambda(A) = 0$, allora $\sum_\sigma \chi_\lambda(\sigma) \cdot \sigma \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ per ogni scelta di $f_1, \ldots, f_n$. Quindi se $f_{r+1} = \cdots = f_n = f$

$$0 = \sum_\sigma \chi_\lambda(\sigma) \cdot \sigma \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n =$$

$$Tr(d_\delta \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \cdot f^{\circ(s-1)}$$

Scegliamo $f_1 = \cdots = f_r = \alpha_0 \pi_0 + \alpha_1 \pi_1$, allora

$$
\begin{aligned}
& Tr(d_\delta \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \\
& \quad = \frac{\dim V_\delta}{|\delta|!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \chi_\delta(\sigma) \prod_{j=1}^{q} Tr(f_{\gamma_j^{l_j - 1}(k_j)} \circ \cdots \circ f_{\gamma_j(k_j)} \circ f_{k_j}) = \\
& \qquad \frac{\dim V_\delta}{|\delta|!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{|\delta|}} \chi_\delta(\sigma) \prod_{j=1}^{q} (\alpha_0{}^{l_j} t_0 + \alpha_1{}^{l_j} t_1) = \\
& \qquad\qquad (\dim V_\delta)(-1)^{|\nu|} \frac{\dim V_\mu}{|\mu|!} \frac{\dim V_\nu}{|\nu|!} \\
& \qquad\qquad\qquad (\alpha_0 - \alpha_1)^{d_0 d_1} \alpha_0{}^{|\mu|} \alpha_1{}^{|\nu|} cp_\mu(d_0) cp_\nu(d_1).
\end{aligned}
$$

Motivi misti

Cosa succede per le varietà singolari e/o non-proiettive? Nelle strutture di Hogde queste corrispondono a strutture non pure, cioè miste.
Si congettura l'esistenza di una categoria abeliana $\mathscr{M}\mathscr{M}$, detta dei motivi misti, che contenga i motivi classici, o puri.
Ma se siamo interessati solo alla coomologia, allora basta conoscere la categoria derivata di $\mathscr{M}\mathscr{M}$.

Motivi misti

La categoria derivata dei motivi misti

Gli assiomi di questa categoria si sono evoluti negli anni. Un particolare set richiede che se X è uno schema, allora $\mathscr{DM}(X)$ sia una $\mathbb{Q}TC$ triangolata con una t-struttura che verifica le seguenti proprietà:

- formalismo dei sei-funtori
- il cuore ha una filtrazione per pesi
- esistono oggetti di Tate
- gli oggetti semisemplici sono i motivi classici
- ci sono isomorfismi canonici

$$H^i_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{DM}}(\mathbb{Q}_{\mathscr{M}}, \mathbb{Q}_{\mathscr{M}}(j)[i]).$$

- ci sono realizzazioni ai motivi di Eckedahl e alle strutture di Hodge miste.

Candidati: Voevodsky, Hanamura, Levine e Nori.

La categoria DM di Voevodsky

La categoria DM è la localizzazione della categoria derivata di una categoria di fasci. Si dimostra che DM è una $\mathbb{Q}TC$, contiene i motivi classici, ha realizzazioni e un formalismo dei sei funtori. Manca la t-struttura.

Proposizione (Mayer-Vietoris)

Sia X liscio e U, V un ricoprimento aperto, abbiamo un triangolo

$$M(U \cap V) \to M(U) \oplus M(V) \to M(X) \to M(U \cap V)[1].$$

Proposizione (Gysin)

Sia X liscio e Z un sottoschema di codimensione pura c, abbiamo

$$M(X \setminus Z) \to M(X) \to M(Z) \otimes \mathbb{L}^c \to M(X \setminus Z)[1].$$

Finitezza in *DM*

Visto che *DM* è una $\mathbb{Q}TC$ ha senso parlare di finito-dimensionalità e Schur-finitezza.

Proposizione

(-) In DM consideriamo il triangolo

$$M \to M' \to M'' \to M[1].$$

Se due sono Sf, allora lo è anche il terzo. In particolare, se M e M'' sono pari (dispari) anche M' è pari (dispari).

La finito-dimensionalità non soddisfa la proposizione.

Finitezza in DM (segue)

Sia X una superficie liscia e proiettiva su $\mathbb{C}$. Sia z uno zero-ciclo di grado zero e $U = X - \mathrm{Supp}(z)$. Allora abbiamo il triangolo di Gysin

$$M(U) \to M(X) \to M(\mathrm{Supp}(z)) \otimes \mathbb{L}^2 \to M(U)[1].$$

O'Sullivan ha dimostrato che per opportune scelte di X e z ($q = 0$ e $p_g > 0$, e $cl(z) \neq 0$), $M(X)$ è fd ma $M(U)$ non è fd, e quindi la 2-su-3 non vale per la fd.

K-teoria

Definizione

Sia $\mathscr{A}$ una categoria additiva, allora definiamo il gruppo di Grothendieck $K_0(\mathscr{A})$ come il quoziente del gruppo abeliano libero generato dagli oggetti di $\mathscr{A}$ modulo la relazione di equivalenza generata da $[A] = [B] + [C]$ se $A = B \oplus C$.

Se esiste anche un prodotto tensore compatibile, allora $K_0(\mathscr{A})$ è un anello. Se $\mathscr{A}$ è una categoria tensore triangolata, allora l'anello di Grothendieck è il quoziente del gruppo abeliano libero modulo $[A] = [B] + [C]$ se $B \to A \to C \to A[1]$.

Esempio

Fibrati vettoriali (di dimensione finita) su uno spazio di Hausdorff compatto, moduli proiettivi (finitamente generati) su un anello, fasci coerenti (localmente liberi) su una varietà algebrica, $\mathscr{M}$, DM

K-teoria dei motivi

Cosa succede agli oggetti finiti in $K_0(\mathscr{M})$ e $K_0(DM)$?
In questo caso, l'esempio di prima

$$M(U) \to M(X) \to M(\mathrm{Supp}(z)) \otimes \mathbb{L}^2 \to M(U)[1]$$

implica $[M(U)] = [M(X)] + [M(\mathrm{Supp}(z)) \otimes \mathbb{L}^2[-1]]$ e quindi $[M(U)]$ è fd in $K_0(DM)$.

Teorema

(Bondarko) Esiste un isomorfismo $K_0(\mathscr{M}) \simeq K_0(DM)$.

Splitting principle

Teorema (Splitting principle)

Sia $x \in K_0(X)$. Esiste un'estensione $f : Y \to X$ tale che la mappa indotta $f^* : K_0(X) \to K_0(Y)$ sia iniettiva e $f^*(x)$ è somma di elementi lineari.

Esempi: fibrati vettoriali e fibrati lineari.

Congettura

(-,Weibel) Il sottoanello degli elementi Sf è il più grande sottoanello su cui vale lo splitting principle.

Funzione zeta motivica

Definizione

Sia X una varieà liscia e proiettiva. Definiamo la sua funzione zeta motivica

$$Z(X,t) = \sum_i [\Lambda^i(M(X))]t^i \in K_0(\mathscr{M})[[t]].$$

Questa funzione zeta estende, ed è ispirata, dalla funzione zeta locale oggetto delle congetture di Weil per la varietà lisce e proiettive su campi finiti.

Teorema (Congetture di Weil)

(Deligne) La funzione zeta è razionale per ogni X, soddisfa una equazione funzionale, vale l'ipotesi di Riemann e c'è una relazione con i numeri di Betti.

Funzione zeta e finitezza

Teorema

(André) Sia X tale che $M(X)$ sia finito-dimensionale, allora $Z(X,t)$ è razionale.

Proposizione

(-, Weibel) Sia X tale che $M(X)$ sia Schur-finito, allora $Z(X,t)$ è determinantalmente razionale.

Si usano le identità di Jacobi-Trudi.