Paolo Stellari

CATEGORIE DERIVATE TWISTATE E SUPERFICI K3

$$\left(\begin{array}{c}\text{Con D. Huybrechts:}\\ \text{math.AG/0409030 e math.AG/0411541}\\ +\\ \text{S.: math.AG/0602399}\\ +\\ \text{Con A. Canonaco: math.AG/0605229}\end{array}\right)$$

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”
Università degli Studi di Milano

CATEGORIE DERIVATE

X liscia e proiettiva. Consideriamo la categoria abeliana $\mathbf{Coh}(X)$.

$$\Downarrow$$

Passiamo alla categoria dei complessi limitati e richiediamo che ogni quasi-isomorfismo sia invertibile.

$$\Downarrow$$

Otteniamo la categoria derivata limitata $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$.

Non tutti i funtori con significato geometrico sono esatti in $\mathbf{Coh}(X)$.

$$\Downarrow$$

Procedura per produrre da essi funtori esatti in $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ (triangolata). Otteniamo i *funtori derivati sinistri e destri*.

Tutti i "funtori geometrici" possono essere derivati.

CATEGORIE DERIVATE TWISTATE

Sia X una varietà proiettiva liscia. Il gruppo

$$\mathrm{Br}(X) := H^2(X, \mathcal{O}_X^*)_{\mathrm{tor}}$$

è il *gruppo di Brauer* di X.

Più precisamente questo è il *gruppo di Brauer coomologico*. Il gruppo di Brauer parametrizza le *algebre di Azumaya*.

Esempio. Una *superficie K3* è una superficie complessa liscia e proiettiva che sia semplicemente connessa e con fibrato canonico banale. In questo caso

$$\mathrm{Br}(X) \cong \mathrm{Hom}(T(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Grazie a questa descrizione, per ogni $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ possiamo porre

$$T(X, \alpha) := \ker(\alpha) \subseteq T(X).$$

Definizione. Una coppia (X, α) dove X è una varietà proiettiva e liscia e $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ è detta *varietà twistata*.

Grazie alla sequenza esponenziale, ogni $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ è determinato da qualche $B \in H^2(X, \mathbb{Q})$ e viceversa. In questo caso, scriviamo $\alpha_B := \alpha$.

Ogni $B \in H^2(X, \mathbb{Q})$ è detto *B-field*.

Sia (X, α) una varietà twistata. $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ può essere rappresentato da un 2-cociclo di Čech

$$\{\alpha_{ijk} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^*)\}$$

su un ricoprimento analitico aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definizione. Un *fascio coerente α-twistato* $\mathcal{E}$ è una collezione di coppie $(\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\}_{i,j\in I})$ dove $\mathcal{E}_i$ è un fascio coerente sull'aperto U_i e

$$\varphi_{ij} : \mathcal{E}_j|_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{E}_i|_{U_i\cap U_j}$$

è un isomorfismo tale che

(i) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$,

(ii) $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$

(iii) $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \alpha_{ijk} \cdot \mathrm{id}$.

$$\Downarrow$$

Otteniamo la categoria abeliana $\mathbf{Coh}(X, \alpha)$.

$$\Downarrow$$

Attraverso la procedura standard otteniamo la categoria triangolata

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha) := \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Coh}(X, \alpha)).$$

FUNTORI DI FOURIER-MUKAI

Orlov ha dimostrato che ogni funtore esatto $F : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ che

(i) sia fully faithful

(ii) ammetta un aggiunto sinistro

è un *funtore di Fourier-Mukai*.

$F : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ è di *tipo Fourier-Mukai* se esiste $\mathcal{E} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X \times Y)$ e un isomorfismo di funtori

$$F \cong \mathbf{R}p_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*(-)),$$

dove $p : X \times Y \to Y$ e $q : X \times Y \to X$ sono le proiezioni naturali.

Il complesso $\mathcal{E}$ è chiamato *kernel* di F e un funtore di Fourier-Mukai con kernel $\mathcal{E}$ verrà indicato con $\Phi_{\mathcal{E}}$.

Una domanda è rimasta aperta:

Sono tutte le equivalenze tra
le categorie derivate twistate
di varietà proiettive lisce
di tipo Fourier-Mukai?

La risposta a questa domanda è ben nota in alcuni contesti geometrici che coinvolgono le superfici K3:

(1) spazi di moduli di fasci stabili su superfici K3 (Mukai + Căldăraru);

(2) K3 con numero di Picard grande (H.-S.).

Una risposta completa alla domanda precedente segue come facile corollario dal seguente risultato:

Teorema. (C.-S.) Siano (X,α) e (Y,β) varietà twistate e sia $F : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X,\alpha) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y,\beta)$ un funtore esatto tale che, per ogni $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathbf{Coh}(X,\alpha)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y,\beta)}(F(\mathcal{F}), F(\mathcal{G})[j]) = 0 \ \textbf{se}\ j < 0.$$

Allora esiste un $\mathcal{E} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X \times Y, \alpha^{-1} \boxtimes \beta)$ e un isomorfismo di funtori $F \cong \Phi_{\mathcal{E}}$. Inoltre, $\mathcal{E}$ è determinato in modo unico a meno di isomorfismi.

Il risultato precedente copre alcuni casi interessanti:

(1) funtori full;

(2) (come caso molto speciale) equivalenze.

Quindi fornisce un miglioramento significativo del risultato di Orlov.

Perché categorie derivate twistate?

Come applicazione otteniamo la seguente versione twistata di un risultato di Gabriel:

Proposizione. **Siano (X, α) e (Y, β) varietà twistate. Allora esiste un isomorfismo $f : X \cong Y$ tale che $f^*(\beta) = \alpha$ se e solo se esiste un'equivalenza esatta $\mathrm{Coh}(X, \alpha) \cong \mathrm{Coh}(Y, \beta)$.**

La categoria abeliana dei fasci twistati è un invariante troppo forte!

Richieste:

1. Preservare relazioni geometriche profonde (spazi di moduli) (Mukai,. . .).
2. Un buon invariante birazionale $\Rightarrow$ "MMP Derivato" (Kawamata, Bridgeland, Chen,. . .).
3. Rilevante per la fisica $\Rightarrow$ Mirror Symmetry (Kontsevich,. . .).

GEOMETRIA DELLE SUPERFICI K3

Il riusltato geometrico principale relativo alle superfici K3 è il seguente teorema classico:

Teorema. (Teorema di Torelli) Siano X e Y superfici K3. Supponiamo che esista un'isometria di Hodge

$$g : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(Y, \mathbb{Z})$$

che mappa la classe di un line bundle ampio su X nel cono ampio di Y. Allora esiste un unico isomorfismo

$$f : X \cong Y$$

tale che $f_* = g$.

$$\Downarrow$$

Teoria dei reticoli + strutture di Hodge
+ cono ampio

TEOREMA DI TORELLI DERIVATO

Esistenza di equivalenze: Orlov + Mukai

$$\Downarrow$$

Teorema. (Teorema di Torelli Derivato) **Siano X e Y superfici K3. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:**

(i) $\mathrm{D^b}(X) \cong \mathrm{D^b}(Y)$**;**

(ii) **esiste un'isometria di Hodge**

$$f : \widetilde{H}(X, \mathbb{Z}) \to \widetilde{H}(Y, \mathbb{Z});$$

(iii) **esiste un'isometria di Hodge**

$$g : T(X) \to T(Y);$$

(iv) Y **è isomorfo ad uno spazio di moduli liscio compatto 2-dimensionale e fine di fasci stabili su X.**

$$\Downarrow$$

Teoria dei reticoli + strutture di Hodge

TEOREMA DI TORELLI DERIVATO TWISTATO

Teorema. (H.-S.) Siano X e X' superfici K3 dotate di B-fields $B \in H^2(X, \mathbb{Q})$ e $B' \in H^2(X', \mathbb{Q})$.

(i) **Se $\Phi : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha_B) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X', \alpha_{B'})$ è un'equivalenza, allora esiste un'isometria di Hodge naturalmente definita**

$$\Phi_*^{B,B'} : \widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}(X', B', \mathbb{Z}).$$

(ii) **Supponiamo che esista un'isometria di Hodge**

$$g : \widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}(X', B', \mathbb{Z})$$

che preserva l'orientazione naturale delle 4 direzioni positive. Allora esiste un'equivalenza

$$\Phi : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha_B) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X', \alpha_{B'})$$

tale che $\Phi_*^{B,B'} = g$.

La struttura reticolare

Usando il cup product, otteniamo il *pairing di Mukai* su $H^*(X,\mathbb{Z})$:

$$\langle\alpha,\beta\rangle := -\alpha_1\cdot\beta_3+\alpha_2\cdot\beta_2-\alpha_3\cdot\beta_1,$$

per ogni $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ e $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ in $H^*(X,\mathbb{Z})$.

$H^*(X,\mathbb{Z})$ con il pairing di Mukai è detto *reticolo di Mukai* e verrà indicato con $\widetilde{H}(X,\mathbb{Z})$.

Struttura di Hodge

Poniamo $H^{2,0}(X)=\langle\sigma\rangle$ e sia B un B-field su X.

$\varphi=\exp(B)\cdot\sigma=\sigma+B\wedge\sigma\in H^2(X,\mathbb{C})\oplus H^4(X,\mathbb{C})$

è una *struttura di Calabi-Yau generalizzata* (Hitchin e Huybrechts).

Definizione. Sia X una superficie K3 con un B-field $B \in H^2(X, \mathbb{Q})$. Denotiamo con $\widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z})$ la struttura di Hodge di peso 2 su $H^*(X, \mathbb{Z})$ tale che

$$\widetilde{H}^{2,0}(X, B) := \exp(B)\left(H^{2,0}(X)\right)$$

e $\widetilde{H}^{1,1}(X, B)$ sia il suo complemento ortogonale rispetto al pairing di Mukai.

Definizione. Il *gruppo di Picard generalizzato (o twistato)* è

$$\mathrm{Pic}(X, \varphi) := \{\beta \in H^*(X, \mathbb{Z}) : \langle \beta, \varphi \rangle = 0\}$$

e il *reticolo trascendente generalizzato (o twistato)* è il reticolo

$$T(X, \varphi) := \mathrm{Pic}(X, \varphi)^{\perp} \subset H^*(X, \mathbb{Z}),$$

dove il complemento ortogonale è rispetto al pairing di Mukai.

Orientazione

Se X è una superficie K3, σ_X è il generatore di $H^{2,0}(X)$ e ω è una classe di Kähler, allora

$$\langle \mathrm{Re}(\sigma_X), \mathrm{Im}(\sigma_X), 1-\omega^2/2, \omega \rangle$$

è un 4-spazio positivo in $\widetilde{H}(X,\mathbb{R})$.

$$\Downarrow$$

Possiede, grazie alla scelta della base, un'orientazione naturale.

Oss. E' molto facile osservare che l'orientazione non dipende dalla scelta di σ_X e ω.

Esempio. L'isometria

$$j \in \mathrm{O}(\widetilde{H}(X,\mathbb{Z}), \sigma_X)$$

definita da

(i) $j|_{H^0(X,\mathbb{Z})\oplus H^4(X,\mathbb{Z})} = id_{H^0(X,\mathbb{Z})\oplus H^4(X,\mathbb{Z})}$;

(ii) $j|_{H^2(X,\mathbb{Z})} = -id_{H^2(X,\mathbb{Z})}$.

non preserva l'orientazione!

Ingredienti principali nella dimostrazione

Carattere di Chern twistato + la struttura di Hodge introdotta precedentemente:

Proposizione. **Consideriamo** $\alpha_B \in \mathrm{Br}(X)$**. Allora esiste una mappa**

$$\mathrm{ch}^B : K(X, \alpha_B) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

tale che:

(i) ch^B **è additivo, i.e.**

$$\mathrm{ch}^B(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{ch}^B(E_1) + \mathrm{ch}^B(E_2).$$

(ii) **Se** $B = \mathrm{c}_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$**, allora** $\mathrm{ch}^B(E) = \exp(\mathrm{c}_1(L)) \cdot \mathrm{ch}(E)$**.**

(iii) **Dati** $\alpha_1 := \alpha_{B_1}$**,** $\alpha_2 := \alpha_{B_2}$ **e** $E_i \in K(X, \alpha_i)$**, si ha**

$$\mathrm{ch}^{B_1}(E_1) \cdot \mathrm{ch}^{B_2}(E_2) = \mathrm{ch}^{B_1+B_2}(E_1 \otimes E_2).$$

(iv) **Per ogni** $E \in K(X,\alpha)$ **si ha** $\mathsf{ch}^B(E) \in \exp(B)\left(\bigoplus H^{p,p}(X)\right)$**.**

Vettore di Mukai twistato che induce isometrie in coomologia.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X,\alpha_B) \arrow[r] \arrow[d, "{[\ ]}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X',\alpha_{B'}) \arrow[d, "{[\ ]}"] \\
\mathrm{K}(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "v^B"'] & K(X',\alpha_{B'}) \arrow[d, "v^{B'}"] \\
\widetilde{H}(X,B,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \widetilde{H}(X',B',\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Spazi di moduli di fasci twistati (Yoshioka, Lieblich,...) $+$ lo studio di alcune equivalenze speciali.

UN ESEMPIO

Sia M uno spazio di moduli proiettivo liscio 2-dimensionale di fasci stabili su una superficie K3 X (M è una K3).

Mukai ha dimostrato che esiste un embedding

$$\varphi : T(X) \hookrightarrow T(M)$$

che preserva le strutture di Hodge e reticolari

$$\Downarrow$$

Abbiamo una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow T(X) \xrightarrow{\varphi} T(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

$$\Downarrow$$

Applichiamo $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ per ottenere

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Br}(M) \xrightarrow{\varphi^\vee} \mathrm{Br}(X) \longrightarrow 0.$$

Căldăraru: Un generatore speciale $\alpha \in \mathrm{Br}(M)$ del kernel di $\varphi^\vee$ è l'ostruzione all'esistenza di una famiglia universale per M.

Teorema. (Căldăraru) Sia X una superficie K3 e sia M uno spazio di moduli coarse di fasci stabili su X come sopra. Allora

(i) $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(M, \alpha^{-1})$ **(via la famiglia universale twistata/quasi-universale);**

(ii) **esiste un'isometria di Hodge**

$$T(X) \cong T(M, \alpha^{-1}).$$

Tale risultato è perfettamente coerente con il Teorema di Torelli Derivato.

Căldăraru ha formulato la seguente congettura (rafforzamento del Teorema di Torelli Derivato Twistato):

Congettura. (Căldăraru) Siano (X, α) e (Y, β) superfici K3 twistate. Allora le seguenti due condizioni sono equivalenti:

(i) $\mathrm{D^b}(X, \alpha) \cong \mathrm{D^b}(Y, \beta)$;

(ii) **esiste un'isometria di Hodge $T(X, \alpha) \cong T(Y, \beta)$.**

$$\Downarrow$$

Evidenza: Lavoro di Donagi e Pantev sulle fibrazioni ellittiche.

La congettura è falsa

Costruiamo una superficie K3 twistata (X, α) tale che

$$T(X, \alpha) \cong T(X, \alpha^2),$$

ma le due strutture di Hodge

$$\widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z}) \quad \widetilde{H}(X, 2B, \mathbb{Z})$$

non sono Hodge-isometriche.

$$\Downarrow$$

Grazie al Teorema di Torelli Derivato Twistato, non esiste nessuna equivalenza

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha^2).$$

$$\Downarrow$$

Un'implicazione nella congettura di Căldăraru's è falsa.

ORIENTAZIONE

La richiesta che l'orientazione sia preservata manca nel punto (i) del Teorema di Torelli Derivato Twistato.

D'altra parte abbiamo il seguente risultato:

Proposizione. (H.-S.) Tutte le equivalenze twistate o non twistate note preservano l'orientazione.

Questo incoraggia a formulare la seguente

Congettura. Siano X e X' due superfici K3 e dotate di due B-field B e B'. Se

$$\Phi : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha_B) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X', \alpha_{B'})$$

è un'equivalenza, allora

$$\Phi_*^{B,B'} : \widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z}) \to \widetilde{H}(X', B', \mathbb{Z})$$

preserva l'orientazione delle 4 direzioni positive.

Recentemente abbiamo dimostrato la precedente congettura per superfici K3 twistate generiche. In questo caso, infatti, otteniamo una descrizione precisa del gruppo delle autoequivalenze della categoria derivata twistata.

Teorema. (H.-M.-S.) **Per una superficie K3 twistata generica (X, α_B) esiste una sequenza esatta breve**

$$1 \to \mathbb{Z}[2] \to \mathrm{Aut}(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X, \alpha_B)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{O}_+ \to 1,$$

dove O_+ è il gruppo delle isometrie di Hodge di $\widetilde{H}(X, B, \mathbb{Z})$ che preservano l'orientazione.

Più precisamente, in collaborazione con Huybrechts e Macrì abbiamo dimostrato la *Congettura di Bridgeland* (che coinvolge anche lo spazio che parametrizza le condizioni di stabilità) per superfici K3 twistate generiche.

NUMERO DI FOURIER-MUKAI PARTNERS

Si tratta di un problema classico nel contesto non twistato.

Proposizione. (H.-S.) Ogni superficie K3 twistata (X, α) ammette solo un numero finito di Fourier-Mukai partners a meno di isomorfismi.

Non-twistato $\neq$ Twistato

$$\Downarrow$$

Proposizione. (H.-S.) Per ogni intero positivo N esistono N superfici K3 twistate a due a due non isomorfe

$$(X_1, \alpha_1), \ldots, (X_N, \alpha_N)$$

con numero di Picard 20 **e tali che le categorie derivate twistate** $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_i, \alpha_i)$ **sono tutte Fourier-Mukai equivalenti.**

SUPERFICI DI KUMMER

Hosono, Lian, Oguiso e Yau

$\Downarrow$

(A) *date due superfici abeliane* A *e* B*,*

$$\mathrm{D^b}(A) \cong \mathrm{D^b}(B)$$

se e solo se

$$\mathrm{D^b}(\mathrm{Km}(A)) \cong \mathrm{D^b}(\mathrm{Km}(B)).$$

L'argomento: osservano che, grazie alla costruzione geometrica delle superfici di Kummer $\mathrm{Km}(A)$ e $\mathrm{Km}(B)$, i reticoli trascendenti di A e B sono Hodge-isometrici se e solo se i reticoli trascendenti di $\mathrm{Km}(A)$ e $\mathrm{Km}(B)$ lo sono. A questo punto si applica il Teorema di Torelli Derivato.

E' chiaro che (A) può essere riformulato nel modo seguente:

(B) *date due superfici abeliane A e B,*

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Km}(A)) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Km}(B))$$

se e solo se esiste un'isometria di Hodge tra i reticoli trascendenti di A e B.

Grazie ad un risultato di Mukai, (A) e (B) sono equivalenti alla seguente affermazione:

(C) *date due superfici abeliane A e B,*

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(B)$$

se e solo se

$$\mathsf{Km}(A) \cong \mathsf{Km}(B).$$

Possiamo applicare il Teorema di Torelli Derivato Twistato per generalizzare (B) nel caso twistato.

Definizione. Siano (X_1, α_1) e (X_2, α_2) superfici abeliane o K3 twistate.

(i) Esse sono *D-equivalenti* se esiste un'equivalenza

$$\Phi : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_1, \alpha_1) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2, \alpha_2).$$

(ii) Esse sono *T-equivalenti* se esistono $B_i \in H^2(X_i, \mathbb{Q})$ tali che $\alpha_i = \alpha_{B_i}$ e un'isometria di Hodge

$$\varphi : T(X_1, B_1) \to T(X_2, B_2).$$

Teorema. (S.) Siano A_1 e A_2 superfici abeliane. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:

(i) esistono $\alpha_1 \in \mathrm{Br}(\mathrm{Km}(A_1))$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Br}(\mathrm{Km}(A_2))$ tali che $(\mathrm{Km}(A_1), \alpha_1)$ e $(\mathrm{Km}(A_2), \alpha_2)$ siano D-equivalenti;

(ii) esistono $\beta_1 \in \mathrm{Br}(A_1)$ e $\beta_2 \in \mathrm{Br}(A_2)$ tali che (A_1, β_1) e (A_2, β_2) siano T-equivalenti.

Inoltre se una delle due condizioni precedenti è vera, allora A_1 e A_2 sono isogene.

Osservazioni

(i) Se $\alpha_j \in \mathrm{Br}(\mathrm{Km}(A_j))$ è non banale per ogni $j \in \{1, 2\}$, allora l'esistenza di un'equivalenza

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Km}(A_1), \alpha_1) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Km}(A_2), \alpha_2)$$

non implica $\mathrm{Km}(A_1) \cong \mathrm{Km}(A_2)$. Questa è una delle differenze principali rispetto al caso non twistato.

(ii) Ci aspettiamo che (ii) nel teorema precedente sia equivalente all'esistenza di un'equivalenza

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A_1, \beta_1) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A_2, \beta_2),$$

dove $\beta_i \in \mathrm{Br}(A_i)$. Sfortunatamente questo non accade.

(iii) Si può dimostrare in modo diretto che se due varietà abeliane A_1 e A_2 sono tali che $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A_1) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A_2))$ allora

$$A_1 \times \widehat{A_1} \cong A_2 \times \widehat{A_2}$$

(grazie a risultati di Orlov) e A_1 è isogeno a A_2.

D'altra parte non ci possiamo attendere che ogni volta che A_1 e A_2 sono isogene allora $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A_1) \cong \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(A_2)$: curve ellittiche!

Il numero di strutture di Kummer

Grazie al teorema precedente abbiamo una mappa suriettiva

$$\Psi : \{\text{Tw ab surf}\}/\cong \longrightarrow \{\text{Tw Kum surf}\}/\cong .$$

Il risultato principale di Hosono, Lian, Oguiso e Yau dimostra che la preimmagine di $[(\mathrm{Km}(A), 1)]$ è finita, per ogni superficie abeliana A e $1 \in \mathrm{Br}(A)$ la classe banale.

$$+$$

La cardinalità delle preimmagini di Ψ può essere arbitrariamente grande.

$$\Downarrow$$

Questo risponde ad una vecchia domanda di Shioda.

Questo quadro può essere completamente generalizzato nel caso twistato.

Proposizione. (S.) (i) Per ogni superficie di Kummer twistata $(\mathsf{Km}(A), \alpha)$**, la preimmagine**

$$\Psi^{-1}([(\mathsf{Km}(A), \alpha)])$$

è finita.

(ii) Dati due interi positivi N **e** n**, esiste una superficie di Kummer twistata** $(\mathsf{Km}(A), \alpha)$ **con** α **di ordine** n **in** $\mathsf{Br}(\mathsf{Km}(A))$ **e tale che**

$$|\Psi^{-1}([(\mathsf{Km}(A), \alpha)])| \geq N.$$

$$\Downarrow$$

Su una superficie K3 twistata possiamo mettere solo un numero finito di *strutture di Kummer twistate* non isomorfe.