

## Esercizi sui rivestimenti

### Esercizio 1.

Classificare i rivestimenti connessi di

- una sfera con 2 punti identificati,
- dell'unione a un punto di una sfera e una circonferenza,
- dello spazio topologico ottenuto incollando una 1 cella a 2 punti distinti di una sfera,
- dell'unione dello spazio topologico ottenuto per rotazione di una circonferenza attorno a una sua retta tangente con la retta stessa

### Esercizio 2.

Descrivere 3 rivestimenti di grado 2 del toro non isomorfi come rivestimenti.

Descrivere un rivestimento della bottiglia di Klein con spazio totale omeomorfo a un cilindro, uno con spazio totale omeomorfo a una nastro di Moebius (senza bordo) e uno omeomorfo a un toro

### Esercizio 3.

Sia  $X$  lo spazio topologico ottenuto attaccando una 1-cella a due punti distinti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Descrivere almeno due rivestimenti doppi di  $X$  non omeomorfi fra di loro.

### Esercizio 4.

Sia

$$F : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (-x_1 : x_0 : -x_3 : x_2).$$

Sia  $G$  il sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  generato da  $F$ .

- Determinare la struttura di  $G$ . (Suggerimento: determinare l'ordine di  $F$ .)
- Dimostrare che  $G$  agisce su  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  in modo propriamente discontinuo.
- Descrivere un rivestimento universale di  $X := \mathbb{P}^3(\mathbb{R})/G$ ?
- Calcolare il gruppo fondamentale di  $X$ .
- Classificare i rivestimenti connessi di  $X$

### Esercizio 5.

(Facoltativo) da M. Manetti - Topologia : es 13.10, es 13.11, es 13.14, es 13.22.

(Facoltativo) Provare a dimostrare da soli la Prop. 12.19 (leggere almeno l'enunciato)

### Esercizio 6.

Costruire un rivestimento  $T_{kg-k+1} \rightarrow T_g$  di grado  $k$  (dove  $T_g$  è la superficie topologica compatta orientabile di genere  $g$ ) e studiarne la corrispondente azione di monodromia.

### Esercizio 7.

- Con riferimento agli esempi 3) e 4) di rivestimenti della figura a otto proposti nel testo di Hatcher, costruire un rivestimento regolare finito della figura a otto che fattorizza tramite ciascuno dei 2.
- Per ciascuno degli esempi 7), 8) e 9) di Hatcher trovare tutti i rivestimenti che lo fattorizzano.

### Esercizio 8.

Costruire un rivestimento universale

- della figura a otto
- dell'unione di una sfera e una circonferenza che si intersecano in 2 punti.
- dell'unione a un punto di una circonferenza e un piano proiettivo reale.

### Esercizio 9.

Costruire 2 rivestimenti di grado 3 non isomorfi dell'unione a un punto di una sfera e 2 circonferenze. Determinare l'azione di monodromia e stabilire se i rivestimenti costruiti sono regolari.

### Esercizio 10.

Classificare i rivestimenti del prodotto di un piano proiettivo reale per una circonferenza