Orientamento Geometrico
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

A.A. 2023-2024

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI MILANO

Outline

Outline

Outline

Outline

Perché la geometria/cos'è la geometria?

Idea

- Non **la** geometria ma **le** geometrie (strumenti diversi=geometrie diverse);
- Si parte da uno spazio topologico e, aggiungendo struttura, si arriva ad introdurre gli oggetti geometrici che vogliamo studiare.

Quindi:

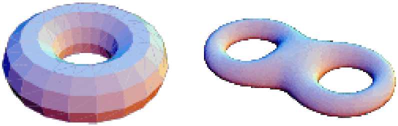
1. Cos'è un oggetto geometrico?
2. Cos'è una proprietà geometrica?
3. Come le studio?

Cos'è un oggetto geometrico?

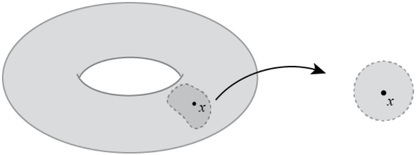
Si parte da uno spazio topologico

$+$

alcune proprietà locali.



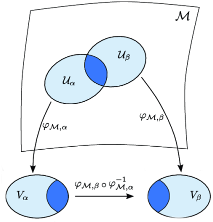
Localmente abbiamo varie possibili descrizioni:



- $\mathbb{R}^n$;
- $\mathbb{C}^n$;
- un insieme di ideali primi in un anello commutativo con un'opportuna topologia.

Cos'è un oggetto geometrico?

. . . ma l'osservazione cruciale è che dal locale dobbiamo passare al **globale**:

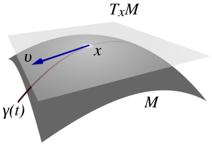


Se abbiamo, ad esempio, che (ristretta all'intersezione)

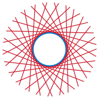
- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M},\alpha}$ omeo $\Longrightarrow$ var. topologica;
- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M},\alpha}$ diffeo $\Longrightarrow$ var. differenziabile;
- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M},\alpha}$ biolomorfismo $\Longrightarrow$ var. complessa;
- fascio strutturale $\Longrightarrow$ schema.

Dal locale al globale e proprietà geometriche

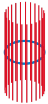
Dal locale al globale: lo **spazio tangente**, che linearizza localmente una varietà.



Globalmente



- var. diff. $\Longrightarrow$ fibrato tangente;
- var. compl. $\Longrightarrow$ fibrato tangente olomorfo;
- schema $\Longrightarrow$ fibrato tangente di Zariski;

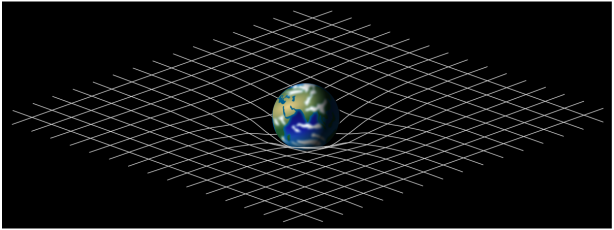


Le proprietà geometriche sono legate a costruzioni come quella appena vista: fibrato cotangente, forme differenziali/olomorfe, fibrato canonico. . .

Esempi

La geometria appare anche nella realtà fisica:

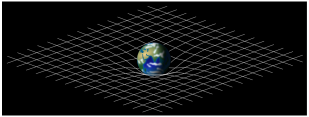
Einstein: la gravità è la curvatura dello spazio-tempo.



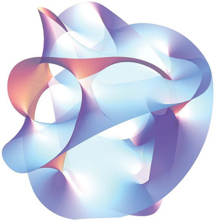
Dobbiamo quindi necessariamente studiare la struttura differenziale e metrica dello spazio-tempo.

Esempi

Teoria delle stringhe: per conciliare la gravità con le altre forze fondamentali occurre una nuova geometria.



+



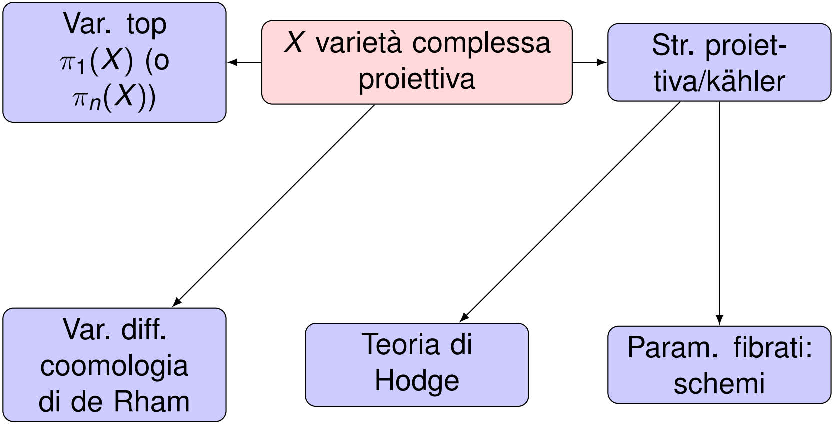
Spazio-tempo

Varietà di Calabi-Yau: varietà complesse che vivono in spazi proiettivi.

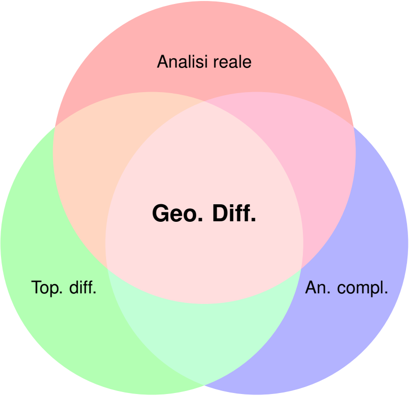
Servono: $4 + 6 = 10$ dimensioni reali (le 6 dimensioni reali sono in realtà 3 complesse).

Come studio proprietà geometriche?

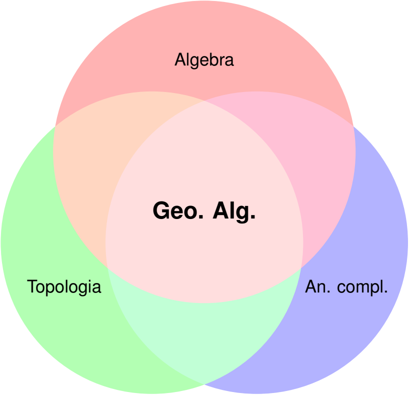
Ad una varietà possiamo associare inviarianti algebrici più facili da calcolare:



Strumenti diversi=geometrie diverse



Orientamento geo. diff.



Orientamento geo. algebrica (complessa)

Outline

Primo semestre

- Geometria Algebrica Proiettiva (Prof. Paul Arne Østvær)
- Geometria degli Schemi (Proff. Chiara Camere e Paolo Stellari)
- Geometria Differenziale (Prof. Paolo Mastrolia)
- Topologia algebrica (Proff. Marina Bertolini e Cristina Turrini)
- Varietà complesse (Proff. Bert van Geemen e Luca Tasin)

Secondo semestre

- Geometria Complessa (Proff. Elisabetta Colombo e Luigi Lombardi)
- Geometria Riemaniana (Prof. Marco Rigoli)
- Geometria Superiore 1 (Proff. Luca Barbieri Viale e Paul Arne Østvær)
- Gruppi di Lie (Prof.ssa Anna Gori)
- Superfici algebriche (Prof.ssa Alice Garbagnati)
- Topologia differenziale (Prof. Diego Matessi)

Corsi da tenere in considerazione

- Geometria 5 (mutuato dalla triennale)
- Algebra commutativa
- Teoria delle Categorie
- Analisi complessa
- Analisi reale
- Dall’orientamento analitico: equazioni alle derivate parziali, elementi di analisi funzionale.

Orientamento differenziale

- Geometria Differenziale;
- Geometria Riemaniana;
- Gruppi di Lie;
- Topologia algebrica;
- Topologia differenziale.

A cui affiancare:

- Analisi reale e complessa;
- Equazioni alle derivate parziali, elementi di analisi funzionale.

Orientamento algebrico

Corsi di natura generale:

- Geometria Algebrica Proiettiva;
- Geometria degli Schemi;
- Geometria Superiore 1;
- Varietà complesse (fondamentale!);
- Topologia algebrica.

In dimensione bassa:

- Geometria complessa (il caso delle curve);
- Superfici Algebriche (il caso delle superfici).

A cui affiancare:

- Analisi complessa;
- Algebra commutativa.

Outline

Geometria 5

Proff. Marina Bertolini e Chiara Camere

Info: Primo semestre, 6 cfu oppure 6+3 cfu, mutuato dalla Laurea Triennale.

Propedeuticità consigliate: i contenuti di Geometria 1,2, 3 e 4.

Esame: esame orale su appuntamento.

Materiale: tutte le informazioni e i materiali didattici saranno disponibili su ARIEL.

Geometria 5

Proff. Marina Bertolini e Chiara Camere

Programma

Parte 6 cfu

Classificazione delle superfici topologiche compatte. CW complessi finiti. Teoria dei rivestimenti. Quozienti per azioni propriamente discontinue. Unicità del sollevamento. Teorema di sollevamento di cammini e omotopie. Monodromia del rivest. Rivestimenti regolari. Rivest. universale. Teorema di classificazione dei rivest. Cenni di algebra omologica. Complesso di de Rham e relativa coomologia. La successioni di Mayer-Vietoris. Il lemma di Poincaré. Teoremi di finitezza.

Parte +3 cfu

Complesso di de Rham a supporto compatto e relativa coomologia. Successione di Mayer-Vietoris e il lemma di Poincaré a supporto compatto. Dualità di Poincaré. Riv. diff. e riv. d'orientazione. Cenni all'orientabilità topologica di varietà.

Geometria Algebrica Proiettiva

Prof. Paul Arne Østvær

Info: Primo semestre, 6 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate: Una conoscenza di base di Algebra commutativa è consigliata (Algebra 4).

Oggetto di studio del corso

Lo studente acquisirà le nozioni di base sulle varietà algebriche affini e proiettive ed imparerà ad utilizzarle nello studio di alcuni casi concreti. Esame orale.

Geometria Algebrica Proiettiva

Prof. Paul Arne Østvær

Programma

Varietà algebriche affini, spazio affine, Nullstellensatz di Hilbert, iperpiani, coniche, topologia di Zariski, dimensioni, funzioni regolari e mappe tra varietà algebriche, mappe razionali e birazionali, varietà algebriche proiettive, spazio proiettivo, equivalenza birazionale, varietà astratte, fasci, fibrati lineari, fibrati vettoriali, spazi tangenti, liscezza, blow-ups, risoluzione di singolarità, polinomi di Hilbert, Grassmanniane, immersioni di Segre e Veronese, teorema di Bezout, geometria enumerativa, esempi.

Materiale di riferimento

A. Gathmann: Geometria Algebrica.

R. Hartshorne: Introduzione alla geometria algebrica.

I. R. Shafarevich: Geometria algebrica di base I.

Info: Secondo semestre, 6 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate: Geometria 3,4,5.

Oggetto di studio del corso

Superificie di Riemann: varietà differenziabile di dimensione 2, le cui carte hanno valori in $\mathbb{C}$ e i cambiamenti di coordinate sono olomorfi (**struttura olomorfa**).

La struttura **olomorfa** rende la geometria più ricca rispetto a quella con la sola **struttura differenziabile.**

Esempi

- La retta proiettiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$; genere $\mathbf{g} = \mathbf{0}$
- Tori complessi: $E_\tau = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}}$, con $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (importante); **g=1**
- Curve algebriche (piane)

$$S^d : \quad F^d(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

  dove F^d è omogeneo di grado d. **Formula del genere:** $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{(d-1)(d-2)}}{\mathbf{2}}$ (da dimostrare)
- Curve algebriche in $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$: date da più equazioni omogenee.

Alcune domande:

- Esistono mappe olomorfe $S_1 \to S_2$? Come sono?
  1. Sono quasi come i riv. in top. (rigidità); formula di Riemann-Hurwitz: $2 - 2g_1 = m(2 - 2g_2) - \sum m_p$; RH implica che $\nexists$ mappe non cost. tra la sfera e il toro.
  2. $g_1 = g_2 \Longrightarrow$ diffeomorfe. Vero anche per biolomorfismi?

- E' vero che ogni superficie di Riemann compatta è anche una curva algebrica?
  Sì: **Teorema di Riemann-Roch**.

Parole chiave: funz. olomorfe e meromorfe, rivestimenti ramificati, grado di un riv. Riemman-Hurwitz, Teorema di esistenza di Riemann, curve algebriche, 1-forme olomorfe, divisori, divisore canonico, divisori ampi, Teorema di Riemann-Roch.

Geometria degli Schemi

Proff. Chiara Camere e Paolo Stellari

Info: Primo semestre, 6 cfu oppure 6+3 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate: non sono richieste propeduiticità obbligatorie ma si assume familiarità con alcune nozioni di algebra commutativa (localizzazioni di anelli e moduli). I corsi di Varietà Complesse e Algebra Commutativa sono un naturale complemento.

Esame: esame orale su appuntamento (Algant student must consign some exercises).

Materiale: tutte le informazioni e le lezioni registrate saranno disponibili su ARIEL. Info sul corso anche sulle pagine dei docenti.

Il corso vuole illustrare l'idea che un contesto naturale in cui la geometria (algebrica) possa essere studiata è quello in cui

- **Topologia:** spazi topologici (irriducibili, di una data dimensione,. . .);
- **Algebra:** fasci di anelli o moduli

si incontrano.

Abbiamo bisogno di una nuova topologia (detta **di Zariski**) su insiemi di ideali primi in anelli commutativi unitari.

Vedremo quindi come varie proprietà topologiche o algebriche hanno una descrizione algebrica naturale.

Geometria degli Schemi

Proff. Chiara Camere e Paolo Stellari

Programma

Parte 6 cfu

Introduzione generale alla teoria degli schemi e dei fasci su schemi (con esempi). Studio delle proprieà base degli schemi: riducibilità, irriducibilità, noetherianità. Costruzioni fondamentali: prodotto fibrato e cambio di base. Proprietà dei morfismi tra schemi: morfismi separati, propri e proiettivi; morfismi etale e lisci; spazio tangente di Zariski.

Parte +3 cfu

Fasci coerenti e coomologia di fasci. Fasci di differenziali. Fasci invertibili, divisori, morfismi proiettivi e scoppiamenti.

Geometria Differenziale

Prof. Paolo Mastrolia

Info: Primo semestre, 6 cfu.

Propedeuticità consigliate: Geometria 1, 2, 3 e 4; Analisi 1 e 2.

Descrizione del corso

L'obiettivo del corso di Geometria Differenziale è quello di approfondire le tematiche fondamentali introdotte nel corso di Geometria 4, in modo da fornire agli studenti una panoramica sulla moderna teoria delle varietà differenziabili e Riemanniane: dopo brevi richiami su concetti di base (varietà differenziabili, fibrato tangente, fibrati tensoriali associati ad una varietà, metriche Riemanniane) e notazioni, considereremo le principali proprietà dei tensori legati alla curvatura, passando per la definizione di connessione lineare, di mappa esponenziale e di geodetica; studieremo le proprietà delle immersioni isometriche e dei cosiddetti campi di Jacobi, le variazioni dell'energia di una curva e i legami tra curvatura e topologia. In base al tempo disponibile e alle richieste degli studenti, affronteremo anche argomenti utili per altri corsi.

Geometria Differenziale

Prof. Paolo Mastrolia

Programma

Richiami sulle varietà differenziabili; complementi sui fibrati tensoriali associati ad una varietà; distribuzioni e teorema di Frobenius(*); metriche Riemanniane; connessioni lineari su varietà; la connessione di Levi Civita e il tensore di curvatura; mappa esponenziale; immersioni isometriche; geodetiche e distanza; varietà Riemanniane complete; introduzione al formalismo del moving frame(*); campi di Jacobi e teorema di Hadamard; variazioni dell'energia di una curva; campi di Jacobi e geodetiche minimizzanti(*); curvatura e topologia.

(*): in base al tempo disponibile e alle richieste degli studenti

Geometria Superiore 1

Proff. Luca Barbieri Viale e Paul Arne Østvær

Info: Secondo semestre, 6 cfu.

Propedeuticità consigliate: Conoscenze di base della topologia algebrica e delle varietà.

Oggetto di studio del corso

Introduzione ai temi classici della teoria dell'omotopia, inclusa la classificazione dei fibrati vettoriali e dei gruppi di sfere omotopiche. Esame Orale.

Geometria Superiore 1

Proff. Luca Barbieri Viale e Paul Arne Østvær

Programma

Fibrati vettoriali, classi caratteristiche, teoria K, omomorfismo J, isomorfismo Thom, campi vettoriali su sfere, omotopia stabile, dualità Spanier-Whitehead, sequenza spettrale di Adams, esempi.

Materiale di riferimento

J. Milnor. J. D. Stasheff: Classi caratteristiche, Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press.

Geometria Riemaniana

Prof. Marco Rigoli

Info: Secondo semestre, 6 cfu.

Propedeuticità consigliate: Nozioni di base di geometria differenziale, qualche dimestichezza di conto con derivate covarianti e tensori e risultati di base sulle equazioni ellittiche. Durante il corso saranno distribuiti appunti a cura del docente.

Programma

Assegnare una funzione liscia S o un tensore simmetrico 2 volte covariante R e cercare una metrica g su M di curvatura scalare S o con tensore di Ricci R costituisce uno dei problemi classici e fondamentali in Geometria Riemanniana. Un secondo problema, anch'esso fondamentale, è quello dello studio della geometria di mappe tra due varietà Riemanniane. La nozione di f-curvatura risulta costituire un ”ponte” tra i due, naturalmente legato al flusso di Ricci e a quello delle mappe armoniche e più in generale a quelle che chiameremo struttura di tipo Einstein su M. In questo contesto si inseriscono in modo naturale problemi analitici , ad esempio la Critical Point Equation e alcune modellizzazioni di meccanica quantistica e relativistica. Scopo del corso è quello di fornire un'introduzione a questi argomenti di ricerca attuali.

Gruppi di Lie

Prof.ssa Anna Gori

Info: Secondo semestre, 6 cfu.

Propedeuticità consigliate: Geometria 1,2,3,4, teoria dei rivestimenti (verranno fatti comunque dei richiami)

Che cos'è un Gruppo di Lie?

Un **gruppo di Lie** è un gruppo $(G, *, e)$ che ha una struttura di varietà differenziabile compatibile con le operazioni di gruppo.

Lo spazio tangente in e a G è detto **Algebra di Lie**.

Introdurrò le nozioni di **gruppo** e di **algebra di Lie** cercando in particolare di dare una loro interpretazione **geometrico-differenziale.** I due concetti, introdotti dal matematico norvegese Sophus Lie per studiare i gruppi di trasformazione continui, sono oggi molto studiati in teoria della rappresentazione e in analisi. Essi hanno un vasto numero di applicazioni fondamentali, soprattutto alla fisica delle particelle.

Programma

Prima parte: Gruppi di Lie e loro algebre, Teoremi di struttura che legano le algebre di Lie ai gruppi, Teorema di Frobenius, rappresentazione aggiunta, caratterizzazione di gruppi di Lie abeliani. I tori. Forma B di Killing Cartan per un'algebra di Lie. Algebre semisemplici e semplici. Verso una classificazione.

Programma

Seconda parte: Azioni di gruppi su varietà Azioni, definizioni ed esempi. Stabilizzatori. Spazi delle orbite, azioni proprie e libere. Caso G compatto, teoremi sulle orbite. Spazi omogenei. Forme invarianti. Orientabilità dei gruppi di Lie. Misure di Haar. Costruzione di una metrica $\mathrm{Ad}(g)$-invariante su algebra di Lie di un Gruppo compatto. Geometria Riemanniana su un gruppo di Lie. Conseguenze su forma di Killing Cartan nel caso G compatto. Conseguenze sul gruppo fondamentale. Teorema della Slice e conseguenze sulle orbite. Teorema dei Tori massimali. Azioni polari. Il gruppo di Weyl.

Applicazioni: Azioni Hamiltoniane e varietà toriche, Il teorema di Delzant. Olonomia in $U(n)$ e varietà Kähler.

Superfici Algebriche

Prof.ssa Alice Garbagnati

Info: Secondo semestre, 6 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate: no propedeuticità formali ma è sicuramente consigliabile avere già seguito Varietà Complesse.

Esame: seminario in cui lo studente mostri le sue competenze sugli argomenti principali del corso e poi svolga un seminario su un argomento inerente al corso non totalmente trattato a lezione.

Materiale: Testi principali di riferimento: *Complex Algebraic Surfaces*, di A. Beauville; *Compact complex Surfaces*, di W Barth, K. Hulek, C. Peters, A. van de Ven.

Superfici Algebriche

Prof.ssa Alice Garbagnati

Programma

- Superfici algebriche= particolari superfici complesse, quindi oggetti di dimensione complessa 2 (e dimensione reale 4) che vivono in spazi proiettivi.
- Ci sono quindi 2 punti di vista: le varietà complesse e le varietà proiettive. Assumendoli entrambi si ottengono informazioni più ricche.
- Per studiare le superfici algebriche studiamo delle mappe definite da queste varietà verso spazi proiettivi. Queste mappe sono legate alle sezioni di fibrati lineari e al concetto di “divisori” (parleremo quindi di divisori, fibrati lineari, le loro relazioni).

Superfici Algebriche

Prof.ssa Alice Garbagnati

Programma

- Presenteremo la classificazione delle superfici algebriche usandoo la nozione di “birazionalità” come iso. fra sup.
- Per le superfici le mappe “birazionali” sono “belle” perché composizione di mappe elem. (scoppiamenti).

Obiettivi

- Corredare la teoria con esempi e costr. esplicite.
- Illustrare la classificazione delle superfici e la teoria dei divisori sulle superfici.
- Fornire gli strumenti per comprendere alcune recenti costruzioni.
- Molti dei risultati e tecniche applicate sono tutt’ora oggetto di ricerca in dimensione superiore.

Topologia Algebrica

Proff. Marina Bertolini e Cristina Turrini

Info: Primo semestre, 6 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate
Per gli studenti della nostra laurea triennale: corsi del triennio (con Geometria 4 e Geometria 5).
Per gli studenti provenienti da altri corsi di laurea triennale:

- spazi topologici, spazi di Hausdorff, spazi compatti, spazi connessi e connessi per archi, omotopia di mappe e di cammini, gruppo fondamentale
- varietà topologiche, classificazione delle superfici topologiche compatte
- CW complessi finiti.

Programma

Richiami di algebra omologica. Introduzione e studio di alcuni funtori della Topologia Algebrica. In particolare

- Gruppi di omologia singolare
- Gruppi di omologia cellulare per CW-complessi finiti
- Anello di coomologia singolare e teorema dei coefficienti universali.

Applicazioni.

Vari strumenti di calcolo per omologia e coomologia.

- Strumento di base per la maggior parte delle discipline geometriche (e non).
- Diverse tecniche di calcolo illustrate su numerosi esempi concreti.
- Risultati significativi in sè: teoremi di invarianza della dimensione e del bordo, teorema della curva di Jordan e sue generalizzazioni a mappe di sfere in sfere
- Sviluppo naturale: Topologia Differenziale

Topologia Differenziale

Prof. Diego Matessi

Info: Secondo semestre, 6 cfu.

Propedeuticità consigliate: Geometria 5 (coomologia di de Rham).

Esame: orale con discussione di esercizi.

Altre info su Ariel

Esempi di problemi difficili

Alcuni problemi che hanno motivato lo sviluppo della topologia differenziale:

- Classificazione delle varietà differenziabili.
- Varietà differenziabili omeomorfe sono anche diffeomorfe?
- Cobordismo: quando un insieme di varietà costituisce il bordo di un'altra varietà?
- Data una varietà differenziabile, quando ammette strutture più fini? (e.g. olomorfe, complesse, metriche speciali etc.)

Strumenti sviluppati: omologia, trasversalità, teoria di Morse, fibrati vettoriali, classi caratteristiche, omotopia.

Scopo del corso: spiegare alcuni di questi strumenti. Ad esempio lo scorso anno:

- Fibrati vettoriali
- Teoria della trasversalità
- Teorema di Poincarè-Hopf sugli zeri di un campo vettoriale
- Isomorfismo di Thom
- Connessione e curvatura
- Classi di Chern, di Pontryagin e di Eulero
- Applicazioni: cenni al cobordismo, coomologia delle varietà proiettive
- Teorema di Gauss-Bonnet generalizzato
- Problemi enumerativi (cenni)

Varietà Complesse

Proff. Bert van Geemen e Luca Tasin

Info: Primo semestre, 6+3 cfu, ALGANT.

Propedeuticità consigliate: geometria differenziale (Geometria 4) e analisi complessa (nozioni di base).

Esame: esame orale su appuntamento (Algant students must consign some exercises).

Materiale: info disponibili su Ariel o sulle pagine web
http://www.mat.unimi.it/users/geemen/VarietaComplesseI.html
http://www.mat.unimi.it/users/geemen/VarietaComplesseE.htm

Varietà Complesse

Proff. Bert van Geemen e Luca Tasin

Programma 6 cfu

Ci sono cinque ‘capitoli’:

- intro generale (complex manifold, tangent space, differential forms and embeddings)
- Complex tori and elliptic curves (study of one dimensional tori: Weierstrass p-function, embedding in to the projective plane as a cubic curve, addition law, isomorphisms)
- Vector bundles (tangent, cotangent and canonical bundles, line bundles, maps between vector bundles and the adjunction formula with applications to classifying manifolds).

Varietà Complesse

Proff. Bert van Geemen e Luca Tasin

Programma 6 cfu

- Sheaves and cohomology (basic definitions, soft sheaves, the canonical resolution, the theorems of de Rham). Čech cohomology.
- Gruppo di Picard.

Programma +3cfu

I principali argomenti saranno:

- varietà di Kähler: proprietà, esempi, connessioni e curvatura;
- fondamenti di teoria di Hodge con applicazioni: teorema di decomposizione e teorema dell'embedding di Kodaira.