

□ MATRICOLA: A ... B ... C ... D ... VOTO^{≥10}:

NOME: COGNOME:

Algebra 1 – Esame 20.07.10

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme non vuoto dei naturali e sia $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione successore.

1. Se S è tale che per $n \in S$ allora $s(n) \in S$ allora $S = \mathbb{N}$? [No]

2

Anche in vista della domanda successiva, è utile capire come è fatto un insieme del tipo descritto. Ebbene, sia m il minimo di S (che esiste, poiché $S \neq \emptyset$). Si ha

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\};$$

infatti, poiché $m \in S$ e, per ogni $n \in S$, anche $s(n) \in S$, il principio di induzione garantisce che $\{n \in \mathbb{N} : n \geq m\} \subseteq S$, e l'altra inclusione segue dal fatto che S non contiene alcun numero minore di m . Viceversa, è ovvio che un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ soddisfa le ipotesi. A questo punto è facile concludere che S non deve necessariamente esaurire \mathbb{N} .

2. Esiste sempre $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ surgettiva? [Sì]

2

Ovvio per la discussione precedente (se $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$, si consideri ad esempio la mappa f che associa ad ogni $x \in \mathbb{N}$ il numero $x + m$).

B Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale $n \geq 1$.

1. Mostrare che

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

2

Poiché $3^n = (1+2)^n$, l'uguaglianza non è altro che la formula della potenza di un binomio. In ogni caso, riportiamo anche una dimostrazione per induzione su n .

Per $n = 1$ l'uguaglianza è evidentemente vera (il secondo membro diventa $2+1$). Supponiamola vera per un fissato $n \geq 1$. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{n+1-k} &= 2^0 + 2^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} 2^{n+1-k} = \\ &= 1 + 2^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) 2^{n+1-k} = 2^{n+1} + 2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} 2^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Ponendo, nell'ultima sommatoria, $j = k - 1$, si ottiene

$$2 \left(2^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \right) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j} = 2 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \right) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j}.$$

Siamo pronti per usare l'ipotesi induttiva, ottenendo che la precedente espressione è uguale a $2 \cdot 3^n + 3^n$, da cui è facile completare il passo induttivo.

2. Si ha che $3^n \equiv_n 3$ se n è primo? [Sì]

2

Si tratta di applicare il Piccolo Teorema di Fermat.

C Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$

1. È vero che 3 e 4 sono coprimi in A ? [Sì]

2

Cerchiamo i divisori comuni di 3 e 4 lavorando con la norma. Si ha $N(3) = 9$ e $N(4) = 16$, dunque, se d è un divisore comune, $N(d)$ deve essere un intero positivo che divide $M.C.D.(9, 16) = 1$. Concludiamo che $N(d) = 1$, e poiché gli elementi con norma 1 in A sono tutti e soli gli elementi invertibili (ovvero 1 e -1), concludiamo che 3 e 4 sono coprimi.

2. È vero che A è euclideo? [No]

2

In effetti A non è neanche un U.F.D., come si vede da $2^3 = (1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7})$. (Si osservi che 2, $1 + i\sqrt{7}$ e $1 - i\sqrt{7}$ sono irriducibili, e ai due membri di questa uguaglianza troviamo due decomposizioni con un numero diverso di fattori irriducibili.)

D Si consideri l'eq. diofantea $ax + by = 2$ con $a \neq 0$, $b > 1$.

1. L'eq. ha soluzioni in $\mathbb{Z} \iff$ la congruenza $ax \equiv_b 2$ ha soluzioni in \mathbb{Z} ? [Sì]

2

In entrambi i casi, ci sono soluzioni se e solo se $M.C.D.(a, b)$ divide 2.

2. L'eq. ha soluzioni in $\mathbb{Z} \iff$ la congruenza $ax + by \equiv_m 2$ ha soluzioni in \mathbb{Z} per ogni $m > 1$? [Sì]

2

Cfr. Dikranjan-Lucido, Teorema 3.22.